数理解析研究所講究録
1085 巻 1999 年 71-81

多変数有理関数の留数計算について

新潟大学工学部 田島慎一 (Shinichi TAJIMA)
お茶の水女子大学大学院 中村弥生 (Yayoi NAKAMURA)

1 Introduction

多変数関数の留数に関しては, Grothendieck duality や Residual currents の研究等, 高度な理論的研究がなされている. また, 代数学のみならず, 幾何学や解析学への応用も数多く, 研究がさかんに行われている. しかしながら, 多変数の場合は留数値を具体的に計算することは極めて困難である. 実際, 多変数有理関数の Grothendieck local residues の場合に限っても, 与えられた有理関数の極の個数が多い場合やその位数が高い場合などは, 計算量が膨大なものとなり, 留数の値を手計算で求めることは, 事実上, ほとんど不可能である.

本稿では, Grothendieck local residues を $\mathcal{D}$-加群の観点から考察することにより得られた結果 (Section3 及び [9], [10], [11] 参照) を用いて, 留数値の具体的計算方法を考える. それにより, 位数の高い極をもつ関数に対して, 同じ留数値をとる関数で, 高々一位の極のみを持つものを与えることができる. これを用いて, 位数の高い極を持つ有理関数の留数値 (の満たす方程式) を計算するアルゴリズムを与える.

なお, 実際の計算は数式処理システム Risa/Asir (Noro and Takeshima [7]), Kan(Takayama [12]) にアルゴリズムをインプリメントして行った.

ここで, 本稿で用いる記号を導入しておく. $f_1,\ldots,f_n$ を変数 $z=(z_1,\ldots,z_n)\in X=\mathbf{C}^n$ に関する多項式の regular sequence とする. I を $f_1,\ldots,f_n$ の生成するイデアル, $\sqrt{I}$ をその根基, $I=I_1\cap\cdots\cap I_\ell$ を I の準素イデアル分解とする. $A=\{z\in X|f_1=\cdots=f_n=0\}=V(I)$ を $f_1,\ldots,f_n$ の共通零点の集合とし, A は異なる有限個の点 A_j, $j=1,\ldots,\nu$ からなるとする. 各 A_j の重複度を μ_j, $\mu=\mu_1+\cdots+\mu_\nu$ とする. また, J を $f_1,\ldots,f_n$ のヤコビ行列式とする. 多項式 φ と regular sequence $f_1,\ldots,f_n$ に対し, n 次元有理微分形式

$$\omega=\frac{\varphi dz}{f_1\cdots f_n} \tag{1}$$

の点 A_j における留数の値を $\mathrm{Res}_{A_j}(\omega)$ であらわす. 但し, $dz=dz_1\wedge\cdots\wedge dz_n$ である.

2 一位の極における留数の値(の満たす方程式)を求めるアルゴリズム

有理関数 $\varphi/f_1\cdots f_n$ が一位の極を持つ場合, 多項式 φ, regular sequence $f_1,\ldots,f_n$ に関して, 次のような条件が満たされる.

- $\mu_j=1,\ j=1,\ldots,\nu$
- $^{\exists}\varphi_J\in\mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}$ s.t., $\varphi=J\cdot\varphi_J \bmod I$

それぞれの場合について, 留数の値を求めるアルゴリズムを与える.

2.1 $\mu_j=1$ の場合

全ての $j=1,\ldots,\nu$ に対して $\mu_j=1$ である場合, 任意の $A_j=\{\alpha_j\}$ において $J(\alpha_j)\neq 0$ であり,

$$\mathrm{Res}_{A_j}(\omega)=\frac{\varphi(\alpha_j)}{J(\alpha_j)} \tag{2}$$

が成り立つ. これは, 次のように言い替えることができる. (2) で与えられる留数は, 不定元 t を導入することにより, $\mathbf{Q}[z,t]$ 上の連立方程式 $f_1=0,\ldots,f_n=0,\ Jt-\varphi=0$ を満たす t として表すことができる. つまり, 留数の値は $f_1,\ldots,f_n,Jt-\varphi\in\mathbf{Q}[z,t]$ の生成するイデアルと $\mathbf{Q}[t]$ との共通部分 $\langle f_1,\ldots,f_n,Jt-\varphi\rangle\cap\mathbf{Q}[t]$ の零点として与えられる. これを, グレブナ基底の計算を用いて実行することにより, 次のアルゴリズムを得る.

アルゴリズム-**I**　留数値の満たす方程式を求めるアルゴリズム
input : $f_1,\ldots,f_n\leftarrow$ *regular sequence in* $\mathbf{Q}[z]$
input : *numerator* $\leftarrow$ 多項式 φ

- $J\leftarrow f_1,\ldots,f_n$ のヤコビ行列式
- *ideal* $\leftarrow f_1,\ldots,f_n,Jt-$ *numerator* の生成する $\mathbf{Q}[z,t]$ のイデアル
- *gröbner* $\leftarrow$ *ideal* の辞書式順序 $z\succ t$ に関するグレブナ基底 (z に関しては適当な順序を与える.)
- *residue* $\leftarrow$ *gröbner* $\cap\,\mathbf{Q}[t]$

output : *residue* $\leftarrow$ 留数の満たす方程式

注意　*ideal*の準素イデアル分解を計算することにより, 留数値 t を極の座標 $(z_1,\ldots,z_n)$ を用いて表した式を求めることができる.

2.2 $\mu_j \geq 1$の場合

$f_1, \ldots, f_n$ の共通零点 A_k が重複度 μ_k を持つとする．このとき，与えられた有理関数 $\varphi/f_1 \cdots f_n$ が高々一位の極を持つならば，分子 φ は，$J \cdot \varphi_J \bmod I$, $\varphi_J \in \mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}$ の形で表される．今，$I_1, \ldots, I_\ell$ のうち，その variety が A_k を含むものを $I_{i(k)}$ とする．$A_k \in V(I_{i(k)})$. これに対し，φ_J をイデアル $\sqrt{I_{i(k)}}$ で割った余りを φ_k とおくと，A_k における ω の留数値は，$\mu_k \varphi_k(\alpha_k)$ に等しい．

アルゴリズム-**II**　点 A_k における留数を求めるアルゴリズム
input : $f_1, \ldots, f_n \leftarrow$ *regular sequence in* $\mathbf{Q}[z]$
input : numerator $\leftarrow$ 多項式 φ
input : $I_{i(k)} \leftarrow A_k \in V(I_{i(k)})$

- $J \leftarrow f_1, \ldots, f_n$ のヤコビ行列式
- $\varphi_k \leftarrow numerator = J \cdot \varphi_J \ mod \ I$ に対し，$\varphi_k \equiv \varphi_J \ mod \ \sqrt{I_{i(k)}}$
- $ideal \leftarrow cons(t - \mu_k \varphi_k, \sqrt{I_{i(k)}})$
- *gröbner* $\leftarrow$ *ideal* の辞書式順序 $z \succ t$ に関するグレブナ基底 (z に関しては適当な順序を与える.)

output : gröbner $\leftarrow V(\sqrt{I_{i(k)}})$ における留数の満たす方程式

注意　留数の満たす方程式 (t の方程式) のみが必要な場合，いずれのアルゴリズムにおいても，*gröbner* の部分を以下で置き直したほうが，より効率的である (Faugére, Gianni, Lazard and Mora [2], Möller [6], Yokoyama, Noro and Takeshima [13] 等を参照のこと).

アルゴリズム′

- *gröbner* $\leftarrow$ *ideal* の全次数辞書式順序 $z \succ t$ に関するグレブナ基底
- *minipoly* $\leftarrow$ ベクトル空間 $\mathbf{Q}[z]/$*gröbner* において t 倍に対応する線形写像の最小多項式

output : minipoly $\leftarrow$ 留数の満たす方程式 (t の方程式)

3 Residue pairing

ここで，アルゴリズムの基礎となる理論の復習をしておく．詳しくは文献 [10], [11] を参照されたい．

イデアル I とその零点集合 $A = V(I)$ に対して, 次のような標準写像 i が自然に定義される.

$$i : \mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X) \to \mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X).$$

ここで, 有理関数 $1/f_1 \cdots f_n$ に対応する $\mathcal{E}xt^n_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X/I, \mathcal{O}_X)$ の要素を $\begin{bmatrix} 1 \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix}$ とおき, それに対応する代数的局所コホモロジー類を $m = i\left(\begin{bmatrix} 1 \\ f_1 \cdots f_n \end{bmatrix}\right)$ とおく. このとき, 各 A_j $(j = 1, \ldots, \nu)$ 上に台を持つような代数的局所コホモロジー群の要素 m_j で, $m = m_1 + \cdots + m_\nu$ を満たすものが一意的に存在する. さらに各 m_j は, $\mathcal{D}_X$-加群 $\mathcal{H}^n_{[A_j]}(\mathcal{O}_X)$ の生成元となるので, $\mathcal{H}^n_{[A_j]}(\mathcal{O}_X) = \mathcal{D}_X m_j$ が成り立つ.

m の $\mathcal{D}_X$-加群としての annihilator ideal(微分作用素のイデアル) を $\mathcal{A}nn$ とおく:

$$\mathcal{A}nn = \{R \in \mathcal{D}_X \mid Rm = 0\}.$$

次が成り立つ.

命題 1

$$\{h \in H^n_{[A_j]}(\mathcal{O}_X) | Rh = 0, {}^\forall R \in \mathcal{A}nn\} = \{cm_j | c \in \mathbf{C}\}, \quad j = 1, \ldots, \nu.$$

一般に, n 次正則微分形式 $\phi dz \in \Omega_X$ と代数的局所コホモロジー類 $h \in \mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ に対し, $\phi h dz \in \mathcal{H}^n_{[A]}(\Omega_X)$ の点 $A_j \in A$ における留数の値を対応させる次の canonical pairing が考えられる.

$$\begin{array}{rccl} \mathrm{Res}_{A_j} : & \Omega_X \otimes \mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X) & \to & \mathbf{C} \qquad\qquad (*) \\ & (\phi dz, h) & \mapsto & \mathrm{Res}_{A_j}\langle \phi dz, h\rangle = \mathrm{Res}_{A_j}\langle \phi h dz\rangle \end{array}$$

特に, $h = m \in \mathcal{H}^n_{[A]}(\mathcal{O}_X)$ として固定すると, $\omega = \dfrac{\phi dz}{f_1 \cdots f_n}$ の A_j における留数の値

$$\mathrm{Res}_{A_j}(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\right)^n \int_{\Gamma_j} \frac{\phi dz}{f_1 \cdots f_n}$$

(ただし, Γ_j は $\{z \| f_j(z) - f_j(\alpha_j)| = \varepsilon_j, \alpha_j \in A_j\}$ で与えられる cycle である) は, 次の線形写像による値として与えられる.

$$\Omega_X \ni \phi dz \mapsto \mathrm{Res}_{A_j}\langle \phi dz, m\rangle \in \mathbf{C}$$

正則微分形式 Ω_X は, $\phi dz \in \Omega_X$, $R \in \mathcal{D}_X$ に対して, $(\phi dz)R = (R^*\phi)dz$ とおくことにより, 右 $\mathcal{D}_X$-加群となる. 但し, R^* は, R の形式的随伴作用素を表す. 特に, $\mathcal{A}nn$ に属する作用素 P に対して, $\mathrm{Res}_{A_j}\langle \phi dz, Pm\rangle = \mathrm{Res}_{A_j}\langle (P^*\phi)dz, m\rangle = 0$ が成り立つ. さらに,

$$K = \{\phi dz \in \Omega_X | \mathrm{Res}_{A_j}\langle \phi dz, m\rangle = 0, \quad j = 1, \ldots, \nu\}$$

に対して, 次が成り立つ.

定理 2

$$K = \{(P^*\psi)dz | P \in \mathcal{A}nn, \psi dz \in \Omega_X\}.$$

4 留数の値を計算するアルゴリズム

有理関数 $\varphi/f_1 \cdots f_j$ で, 位数が 1 より大きい極を持つようなものを考察する. また, この節では, $\Omega_X/I\Omega_X$ と $\mathbf{Q}[z]/I$ をベクトル空間として同一視し, 議論を進める. 次の補題は基本的である.

補題 3

$$\dim \mathbf{Q}[z]/\sqrt{I} = \nu.$$

ここで, $V_K = \{P^*\psi \bmod I | P \in \mathcal{A}nn, \psi \in \mathbf{Q}[z]\}$, $V_J = \{J \cdot \eta \bmod I | \eta \in \mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}\}$ とおくと, これらは μ 次元ベクトル空間 $\mathbf{Q}[z]/I$ の部分ベクトル空間となり, 次元はそれぞれ $\dim V_K = \mu - \nu$, $\dim V_J = \nu$ である. 明らかに次の関係が成り立つ.

補題 4

$$\mathbf{Q}[z]/I \simeq V_J \oplus V_K.$$

この補題により, 与えられた $\varphi \in \mathbf{Q}[z]$ に対して, $\varphi = J \cdot \varphi_J + \varphi_K \bmod I$ を満たす $\varphi_J \in \mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}$, $\varphi_K \in V_K$ が一意に決まる. 具体的には, 次のように計算する. $\mathcal{A}nn$ の適当な要素 $P_1, \ldots, P_s$ をとり, その随伴作用素 $P_1^*, \ldots, P_s^*$ を, $\mathbf{Q}[z]/I = Span\{\kappa_1, \ldots, \kappa_\mu\}$ に施す. すると, $P_1^*\kappa_1 \bmod I, \ldots, P_1^*\kappa_\mu \bmod I, \ldots, P_s^*\kappa_\mu \bmod I$ のうち, $\mu - \nu$ 個が一次独立となることが分かる. それらを, $\varrho_1, \ldots, \varrho_{\mu-\nu}$ とおく. 一方, $\mathbf{Q}[z]/\sqrt{I} = Span\{\eta_1, \ldots, \eta_\nu\}$ に対して, $J\eta_1 \bmod I, \ldots, J\eta_\nu \bmod I$ をそれぞれ $\varsigma_1, \ldots, \varsigma_\nu$ とおく. このとき, 分子 φ は

$$\varphi = (c_1\varsigma_1 + \cdots + c_\nu\varsigma_\nu) + (d_1\varrho_1 + \cdots + d_{\mu-\nu}\varrho_{\mu-\nu}) \quad \bmod \quad I$$

の形に一意的に書ける. ここで, $\varphi_J = c_1\eta_1 + \cdots + c_\nu\eta_\nu$, $\varphi_K = d_1\varrho_1 + \cdots + d_{\mu-\nu}\varrho_{\mu-\nu}$ とおく. 明らかに

$$\mathrm{Res}_{A_j}\langle \varphi dz, m\rangle = \mathrm{Res}_{A_j}\langle (J \cdot \varphi_J)dz, m\rangle + \mathrm{Res}_{A_j}\langle \varphi_K dz, m\rangle$$

であるが, 定理により

$$\begin{aligned} \mathrm{Res}_{A_j}\langle \varphi dz, m\rangle &= \mathrm{Res}_{A_j}\langle (J \cdot \varphi_J)dz, m\rangle + 0 \\ &= \mathrm{Res}_{A_j}\langle (J \cdot \varphi_J)dz, m\rangle \end{aligned}$$

が成り立つ. $J\cdot\varphi_J/f_1\cdots f_n$ は高々一位の極のみを持つ有理関数であるので, アルゴリズム-*I*, アルゴリズム-*II* を用いて, 留数の値を求めることができる.

アルゴリズム-**III**　極の位数を下げるためのアルゴリズム
input : $f_1,\ldots,f_n \leftarrow$ *regular sequence in* $\mathbf{Q}[z]$
input : *numerator* $\leftarrow$ 多項式 φ

- $J \leftarrow f_1,\ldots,f_n$ のヤコビ行列式
- $P_1,\ldots,P_s \leftarrow m$ の適当な *annihilators*
- $\kappa_1,\ldots,\kappa_\mu \leftarrow \mathbf{Q}[z]/I$ の基底
- $\varrho_1,\ldots,\varrho_{\mu-\nu} \leftarrow$ 一次独立な $P_j^*\kappa_i$ *mod* $I\quad(1\le j\le s; 1\le i\le r)$
- $\eta_1,\ldots,\eta_\nu \leftarrow \mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}$ の基底
- $\varsigma_j \leftarrow J\eta_j$ *mod* $I\quad(1\le j\le\nu)$
- $(c_1,\ldots,c_\nu) \leftarrow$ *numerator* $=(c_1\varsigma_1+\ldots+c_\nu\varsigma_\nu)+(d_1\varrho_1+\ldots+d_{\mu-\nu}\varrho_{\mu-\nu})$ *mod* I
- $\varphi_J \leftarrow c_1\eta_1+\ldots+c_\nu\eta_\nu$
- *numerator* $\leftarrow J\cdot\varphi_J$

output : $\dfrac{numerator}{f_1\cdots f_n}$ $\leftarrow$ 一位の極を持つ有理関数

$\rightarrow$ アルゴリズム-*I* またはアルゴリズム-*II*

注意　$z=(z_1,\ldots,z_n)$ に関し, 適当な項順序を与えて I のグレブナ基底を計算することにより, $\mathbf{Q}[z]/I$ の基底 $\kappa_1,\ldots,\kappa_\mu$, $\mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}$ の基底 $\eta_1,\ldots,\eta_\nu$ が一意に定まる. それにより, mod I の計算も一意的に行うことができる.

5　例

例 **1** $f_1=(x^2+y^2)^2+3x^2y-y^3$, $f_2=x^2+y^2+y$, $\varphi=-9y^2x^2+(-3y^3+53y)x+32$ に関して, $\omega=\varphi dx\wedge dy/f_1f_2$ の留数を求める.

$I=\langle f_1,f_2\rangle$ の辞書式順序 $y\succ x$ に関するグレブナ基底は, $\langle -4x^6+x^4, 4x^4+x^2+y\rangle$ であり, I の準素イデアル分解は $I_1=\langle x^2+y, y^2\rangle$, $I_2=\langle 2y+1, 2x-1\rangle$, $I_3=\langle 2y+1, 2x+1\rangle$ により, $I_1\cap I_2\cap I_3$ で与えられる. I の根基は $\sqrt{I}=\langle -4x^3+x, 2x^2+y\rangle$ である. $\sqrt{I_2}=I_2$, $\sqrt{I_3}=I_3$ であり, 一方, $\sqrt{I_1}=\langle y,x\rangle$ である. よって f_1,f_2 の共通零点 A は $A_1=\{(0,0)\}$,

$A_2=\{(\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$, $A_3=\{(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})\}$ からなり，重複度はそれぞれ $\mu_1=4$, $\mu_2=1$, $\mu_3=1$ である．

$m=i\left(\begin{bmatrix} 1 \\ f_1f_2 \end{bmatrix}\right)$ の *annihilator* $P=(-4x^3+x)Dx+(8x^4-2x^2)Dy-16x^4-20x^2+4$ に対して，随伴作用素 $P^*=-(-4x^3+x)Dx-(8x^4-2x^2)Dy-16x^4-32x^3-8x^2+4x+3$ の $\mathbf{Q}[z]/I=Span\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5\}$ に対する像は，次で与えられる．

$$\begin{array}{rcll} P^*1 &=& -16x^4-8x^2+3, & \\ P^*x &=& -16x^5-4x^3+2x, & \\ P^*x^2 &=& -4x^4+x^2 & mod \quad I, \\ P^*x^3 &=& 0 & mod \quad I, \\ P^*x^4 &=& 0 & mod \quad I, \\ P^*x^5 &=& 0 & mod \quad I. \end{array}$$

このとき，$\varrho_1=-16x^4-8x^2+3, \varrho_2=-16x^5-4x^3+2x, \varrho_3=-4x^4+x^2$ の 3 個が一次独立である．

f_1, f_2 のヤコビ行列式は $J=-2x^3+(22y^2+6y)x$ であり，これと $\mathbf{Q}[z]/\sqrt{I}=Span\{1,x,x^2\}$ との積は，

$$\begin{array}{rcll} J\cdot 1 &=& 64x^5-8x^3 & mod \quad I, \\ J\cdot x &=& 8x^4 & mod \quad I, \\ J\cdot x^2 &=& 8x^5 & mod \quad I \end{array}$$

で与えられる．$\varsigma_1=64x^5-8x^3, \varsigma_2=8x^4, \varsigma_3=8x^5$ とおく．これらを用いて，φ は

$$\varphi=(\frac{53}{8}\varsigma_1+\frac{503}{8}\varsigma_2-\frac{315}{4}\varsigma_3)+(\frac{32}{3}\varrho_1+\frac{256}{3}\varrho_3) \quad mod \quad I$$

と書くことができる．今，

$$\varphi_J=\frac{53}{8}+\frac{503}{8}x-\frac{315}{4}x^2$$

とおくと，定理により，

$$Res_{A_j}(\omega)=Res_{A_j}(\frac{(J\cdot\varphi_J)dx\wedge dy}{f_1f_2}), \quad j=1,2,3$$

が成り立つ．$J\cdot\varphi_J/f_1f_2$ は各 $A_j, j=1,2,3$ を一位の極としてもつ．

φ_J は，$\sqrt{I_j}$ に対して

$$\begin{array}{rcll} \frac{53}{8}+\frac{503}{8}x-\frac{315}{4}x^2 &=& \frac{53}{8} & mod \quad \sqrt{I_1} \\ &=& \frac{147}{8} & mod \quad \sqrt{I_2} \\ &=& -\frac{89}{2} & mod \quad \sqrt{I_3} \end{array}$$

と表すことができる．よって，各点 A_j における ω の留数値は，それぞれ
$Res_{[(0,0)]}(\omega) = 4 \cdot \frac{53}{8} = \frac{53}{2}$, $Res_{[(1/2,-1/2)]}(\omega) = \frac{147}{8}$, $Res_{[(-1/2,-1/2)]}(\omega) = -\frac{89}{2}$
で与えられる．

例 2 $f_1 = -x^2+y+4$, $f_2 = (-y^4-10y^3-36y^2-56y-32)x-y^5-13y^4-66y^3-164y^2-200y-96$, $\varphi = -30x^4+23x^3+(y^6+92y+3)x-4y-9$ に関して，$\omega = \varphi dx \wedge dy/f_1f_2$ の留数を求める．

$I = \langle f_1, f_2 \rangle$ の辞書式順序 $y \succ x$ に関するグレブナ基底は，$\langle -x^{10}-x^9+7x^8+6x^7-18x^6-12x^5+20x^4+8x^3-8x^2, -x^2+y+4 \rangle$ であり，I の準素イデアル分解は $I_1 = \langle x+y+3, x^2+x-1 \rangle$, $I_2 = \langle x^2-y-4, y^3+6y^2+12y+8 \rangle$, $I_3 = \langle y+4, x^2 \rangle$ により，$I_1 \cap I_2 \cap I_3$ で与えられる．根基はそれぞれ $\sqrt{I} = \langle x^5+x^4-3x^3-2x^2+2x, x^2-y-4 \rangle$, $\sqrt{I_1} = \langle x^2+x-1, x+y+3 \rangle$, $\sqrt{I_2} = \langle x^2-2, y+2 \rangle$, $\sqrt{I_3} = \langle x, y+4 \rangle$ である．従って，$V(I)$ は 5 点からなり，$V(I_1)$, $V(I_2)$,$V(I_3) = \{(0,-4)\}$ の各点における重複度はそれぞれ $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mu_3 = 2$ である．

$m = i\left(\begin{bmatrix} 1 \\ f_1f_2 \end{bmatrix}\right)$ の *annihilator* $P = (x^5+x^4-3x^3-2x^2+2x)Dx+(2x^6+2x^5-6x^4-4x^3+4x^2)Dy+10x^4+9x^3-16x^2-6x+4$ に対して，随伴作用素 $P^* = -(x^5+x^4-3x^3-2x^2+2x)Dx-(2x^6+2x^5-6x^4-4x^3+4x^2)Dy+5x^4+5x^3-7x^2-2x+2$ の $\mathbf{Q}[z]/I = Span\{1,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6,x^7,x^8,x^9\}$ に対する像は，次で与えられる．

$$
\begin{array}{rcll}
P^*1 &=& 5x^4+5x^3-7x^2-2x+2, & \\
P^*x &=& 4x^5+4x^4-4x^3, & \\
P^*x^2 &=& 3x^6+3x^5-x^4+2x^3-2x^2, & \\
P^*x^3 &=& 2x^7+2x^6+2x^5+4x^4-4x^3, & \\
P^*x^4 &=& x^8+x^7+5x^6+6x^5-6x^4, & \\
P^*x^5 &=& 8x^7+8x^6-8x^5, & \\
P^*x^6 &=& -x^{10}-x^9+11x^8+10x^7-10x^6 & \\
&=& 4x^8+4x^7+8x^6+12x^5-20x^4-8x^3+8x^2 & mod \quad I, \\
P^*x^7 &=& -2x^{11}-2x^{10}+14x^9+12x^8-12x^7 & \\
&=& 24x^7+24x^6-40x^5-16x^4+16x^3 & mod \quad I, \\
P^*x^8 &=& -3x^{12}-3x^{11}+17x^{10}+14x^9-14x^8 & \\
&=& 12x^8+12x^7+12x^6+24x^5-56x^4-32x^3+32x^2 & mod \quad I, \\
P^*x^9 &=& -4x^{13}-4x^{12}+20x^{11}+16x^{10}-16x^9 & \\
&=& 64x^7+64x^6-128x^5-64x^4+64x^3 & mod \quad I.
\end{array}
$$

このとき，$\varrho_1 = 5x^4+5x^3-7x^2-2x+2$, $\varrho_2 = 3x^6+3x^5-x^4+2x^3-2x^2$, $\varrho_3 = 2x^7+2x^6+2x^5+4x^4-4x^3$, $\varrho_4 = x^8+x^7+5x^6+6x^5-6x^4$, $\varrho_5 = 8x^7+8x^6-8x^5$ の 5 個が一次独立である．

f_1, f_2 のヤコビ行列式は $J = (8y^3+60y^2+144y+112)x^2+(10y^4+104y^3+396y^2+656y+400)x + y^4 + 10y^3 + 36y^2 + 56y + 32$ であり，これと，$\mathbf{Q}[z]/\sqrt{I} = Span\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ との積は，

$$\begin{aligned}
J\cdot 1 &= 10x^9 + 9x^8 - 56x^7 - 42x^6 + 108x^5 + 60x^4 - 80x^3 - 24x^2 + 16x \quad mod \quad I,\\
J\cdot x &= -x^9 + 14x^8 + 18x^7 - 72x^6 - 60x^5 + 120x^4 + 56x^3 - 64x^2 \quad mod \quad I,\\
J\cdot x^2 &= 15x^9 + 11x^8 - 78x^7 - 42x^6 + 132x^5 + 36x^4 - 72x^3 + 8x^2 \quad mod \quad I,\\
J\cdot x^3 &= -4x^9 + 27x^8 + 48x^7 - 138x^6 - 144x^5 + 228x^4 + 128x^3 - 120x^2 \quad mod \quad I,\\
J\cdot x^4 &= 31x^9 + 20x^8 - 162x^7 - 72x^6 + 276x^5 + 48x^4 - 152x^3 + 32x^2 \quad mod \quad I
\end{aligned}$$

で与えられる．$\varsigma_1 = 10x^9 + 9x^8 - 56x^7 - 42x^6 + 108x^5 + 60x^4 - 80x^3 - 24x^2 + 16x$, $\varsigma_2 = -x^9+14x^8+18x^7-72x^6-60x^5+120x^4+56x^3-64x^2$, $\varsigma_3 = 15x^9+11x^8-78x^7-42x^6+132x^5+36x^4-72x^3+8x^2$, $\varsigma_4 = -4x^9+27x^8+48x^7-138x^6-144x^5+228x^4+128x^3-120x^2$, $\varsigma_5 = 31x^9 + 20x^8 - 162x^7 - 72x^6 + 276x^5 + 48x^4 - 152x^3 + 32x^2$ とおく．これらを用いて，φ は

$$\begin{aligned}
\varphi &= (\frac{1869}{8}\varsigma_1 - \frac{2373647}{3840}\varsigma_2 - \frac{1531057}{1920}\varsigma_3 + \frac{12801}{40}\varsigma_4 + \frac{1285297}{3840}\varsigma_5)\\
&\quad +(\frac{7}{2}\varrho_1 - \frac{293}{32}\varrho_2 - 6\varrho_3 + \frac{195}{64}\varrho_4 + \frac{23}{16}\varrho_5) \quad mod \quad I
\end{aligned}$$

と書くことができる．今

$$\varphi_J = \frac{1869}{8} - \frac{2373647}{3840}x - \frac{1531057}{1920}x^2 + \frac{12801}{40}x^3 + \frac{1285297}{3840}x^4$$

とおくと，定理により，

$$Res_{A_j}(\omega) = Res_{A_j}(\frac{(J\cdot\varphi_J)dx\wedge dy}{f_1 f_2}), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5$$

が成り立つ．$J\cdot\varphi_J/f_1f_2$ は $V(I)$ の各点を一位の極としてもつ．

φ_J は，$\sqrt{I_j}$ に対して

$$\begin{aligned}
\frac{53}{8} + \frac{503}{8}x - \frac{315}{4}x^2 &= -\frac{924}{5}x - \frac{1072}{5} \quad mod \quad \sqrt{I_1}\\
&= \frac{16829}{768}x - \frac{179}{8} \quad mod \quad \sqrt{I_2}\\
&= -\frac{1869}{8} \quad mod \quad \sqrt{I_3}
\end{aligned}$$

と表すことができる．よって，$V(I_3) = \{(0, -4)\}$ の重複度は 2 であるから，$V(I_3)$ における留数値は $Res_{(0,4)}(\omega) = 2\cdot\frac{1869}{8} = \frac{1869}{4}$ となる．また，各点 $V(I_1)$, $V(I_2)$ における ω の留数値の計算のため，イデアル $\langle x^2 + x - 1, x + y + 3, t - (-924/5x - 1072/5)\rangle$, $\langle x^2 - 2, y + 2, t - 3(16829/768x - 179/8)\rangle$, を考える．これらのイデアルの辞書式順序 $y \succ x \succ t$ に関す

るグレブナ基底を計算すると, $\langle 5t^2+1220t-139024, 924x+5t+1072, 924y-5t+1700\rangle$, $\langle -32768t^2-4399104t+135570313, -16829x+256t+17184, y+2\rangle$ となり, 従って, $V(I_1)$ 上での留数値は $5t^2+1220t-139024=0$ を満たし, $V(I_2)$ 上では $-32768t^2-4399104t+135570313=0$ を満たす.

6 まとめ

$\mathcal{D}$ 加群の理論を用いることにより, 多変数関数の留数 (Grothendieck local residues) 値を求めることができることを示し, 特に, 有理関数の留数値 (の満たす方程式) を求めるアルゴリズムを与えた.

具体的には, 微分作用素を用いることにより, 留数を効率的に計算することができることを明らかにし, 位数の高い極における留数値の計算を, 極の位数が 1 である場合の留数値の計算 (アルゴリズム-*I,II*) に帰着させた (アルゴリズム-*III*). この手法は, 古典的な Horowits アルゴリズムの留数計算に関する多変数関数への自然な拡張とみなすこともできる. なお, これらの作用素の効率的構成が今後の課題である.

参 考 文 献

[1] M. E. Alonso, E. Becker, M. F. Roy and T. Wörmann, *Zeros, multiplicities, and idempotents for zero-dimensional systems*, Progress in Mathematics **143**, (1996)

[2] J. C. Faugére, P. Gianni, D. Lazard and T. Mora, *Efficient computation of zero-dimensional Gröbner bases by change of ordering*, J. Symbolic Computation **16** (1993), 329–344.

[3] P. Griffiths and J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley Interscience, 1978.

[4] M. Kashiwara, *On the maximally overdetermined system of linear differenial equations,I*, Publ. RIMS, Kyoto Univ. **10** (1975), 563-579.

[5] M. Kashiwara, *On the holonomic systems of linear differntial eqauations,II*, Inventiones mathematicae **49** (1978), 121-135.

[6] H. M. Möller, *Systems of algebraic equations solved by means of endomorphism*, Lect. Notes in Comput. Sci. **673** (1993), 43–56.

[7] M. Noro and T. Takeshima, *Risa/Asir–a computer algebra system*, in Proc. Internat. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (eds P.S. Wang), ACM New York (1992), 387–396 (ftp: endeavor.fujitsu.co.jp/pub/isis/asir).

[8] T. Oaku, *Algorithms for the b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules*, Adv. in Appl. Math. **19** (1997), 61–105.

[9] S. Tajima *Grothendieck residue calculus and holonomid D-modules*, Proc. of the Fifth International Conference on Complex Analysis, Beijing 1997, 301–304.

[10] S. Tajima, T. Oaku and Y. Nakamura, *Multidimensional local residues and holonomic D-modules*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1033** 「特異点と複素解析幾何」(1998), 59–70.

[11] S. Tajima and Y. Nakamura, 微分作用素をもちいた有理関数の留数計算と *Horowitz's algorithm*, 京都大学数理解析研究所講究録 **1038** 「数式処理における理論と応用の研究」(1998), 23–30.

[12] N. Takayama, *Kan: A system for computation in algebraic analysis* (1991–), (http://www.math.s.kobe-u.ac.jp).

[13] K. Yokoyama, M. Noro and T. Takeshima, *Solutions of systems of algebraic equations and linear maps on residue class rings*, J. Symbolic Computation **14** (1992), 399–417.